21. Solução particular de EDO linear da 2^a ord

Consideremos

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x). \tag{21.1}$$

Sabemos, que solução geral da (21.1) tem forma $y = y_h + y_p$, onde

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

é solução geral da

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{21.2}$$

e y_p é solução particular da (21.1). Procuremos y_p na forma $y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, assim

$$y_p' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Sejam $c_1(x)$ e $c_2(x)$ tais que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \tag{21.3}$$

assim

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x), \\ y_p'' &= c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x) + y_2''(x). \end{aligned}$$

Substituindo y_p, y_p', y_p'' na (21.1) temos

$$c_1(x)\underbrace{[y_1''(x) + p_2(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)]}_{=0} + c_2(x)\underbrace{[y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_0(x)y_2(x)]}_{=0} + \\ + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x), \Longrightarrow$$

$$c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=g(x). \tag{21.4}$$

Assim temos sistema (21.3)-(21.4) ou

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0, \\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=g(x) \end{cases} \tag{21.5}$$

ou na forma equivalente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Temos que $\det(A)=W(y_1,y_2)(x)\neq 0$ (como y_1 e y_2 são LI), assim (21.5) tem unica solução. Pela regra de Cramer,

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}=\frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)},$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}=\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)},$$

portanto

$$c_1(x)=-\int\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx, \qquad c_2(x)=\int\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx.$$

Teorema 21.0.1 Se as funções p_1,p_0,g são continuas em intervalo I e $\{y_1,y_2\}$ é conjunto fundamental da equação

$$y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0,$$

então a equação

$$y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=g(x)$$

tem solução particular y_p

$$y_p=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}+y_2(x)\int\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx,$$

portanto a solução geral tem forma

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p, \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 21.1** Resolva

$$y''+4y=\frac{3}{\operatorname{sen}x}.$$

Solução.

$$y = y_h + y_p.$$

Temos $p_1(x) = 0$, $p_0(x) = 4$, $g(x) = \dfrac{3}{\operatorname{sen} x}$.

a) Procuremos y_h. Equação característica é $P_2(r) = r^2 + 4 = 0$, assim $r = \pm 2i$ e $\{\underbrace{\cos 2x}_{=y_1}, \underbrace{\operatorname{sen} 2x}_{=y_2}\}$ é conjunto fundamental, portanto $y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Procuremos y_p. Seja $y_p = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\operatorname{sen} 2x$ usando (21.5), obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{\operatorname{sen} x} \end{bmatrix}.$$

Pela regra de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ \frac{3}{\operatorname{sen} x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{3\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}}{2\cos^2 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x} = -3\cos x.$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & \frac{3}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3\cos 2x}{\operatorname{sen} x}}{2\cos^2 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{3}{2}\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 3\operatorname{sen} x.$$

;-)

Assim,

$$c_1(x) = \int -3\cos x dx = -3\operatorname{sen} x + c',$$
$$c_2(x) = \int (\frac{3}{2}\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 3\operatorname{sen} x) dx = -\frac{3}{2}\ln|\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \cot x| + 3\cos x + c''.$$

Sejam $c' = c'' = 0$. Logo

$$y_p = -3\operatorname{sen} x \cos 2x - \frac{3}{2}\ln|\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \cot x| \operatorname{sen} 2x + 3\cos x \operatorname{sen} 2x,$$

e podemos escrever a solução geral $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - 3\operatorname{sen} x \cos 2x - \frac{3}{2}\ln|\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \cot x| \operatorname{sen} 2x + 3\cos x \operatorname{sen} 2x$.

■ **Exemplo 21.2** Ache solução geral da equação geral

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2 + 1,$$

sabendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x^{-2}$ são soluções LI da

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Solução. Temos que $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{x^2+1}{x^2} = g(x)$, $y = y_h + y_p$, onde $y_h = c_1 x + c_2 x^{-2}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Procuremos y_p. Seja $y_p = c_1(x)x + c_2(x)x^{-2}$, onde

$$\begin{bmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -\frac{2}{x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2} \end{bmatrix}.$$

;-)

Assim

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{x^2+1}{x^2} & \frac{-2}{x^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & \frac{-2}{x^3} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x^2+1}{x^4}}{-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x^2},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x^2+1}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & \frac{-2}{x^3} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{-\frac{3}{x^2}} = -\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}.$$

Agora

$$c_1(x) = \int (\frac{1}{3} + \frac{1}{3x^2})dx = \frac{x}{3} - \frac{1}{3x} + c'$$
$$c_2(x) = \int (-\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3})dx = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6} + c''.$$

Supondo $c' = c'' = 0$, obtemos

$$y_p = (\frac{x}{3} - \frac{1}{3x})x + (-\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6})x^{-2} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}.$$

Resumindo

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

21.1 Equação de Euler

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0, \qquad x > 0 \tag{21.6}$$

MÉTODO: mudança de variável $x = e^t$, ou $t = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Assim (21.6) implica que

$$a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=a_2x^2\cdot\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+a_1x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+a_0y=a_2\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_2)\frac{dy}{dt}+a_0y=0. \tag{21.7}$$

Em outras palavras, obtemos equação com coeficientes constantes, logo (21.7) tem solução do tipo e^{rt}, onde r é raiz da equação

$$r^2+\frac{a_1-a_2}{a_2}r+\frac{a_0}{a_2}=0,$$

assim $y(x)=e^{r\ln x}=x^r$ é solução da (21.6).

■ **Exemplo 21.3** Resolva

$$x^2y''+2xy'+y=\ln x.$$

Solução. Temos $y=y_h+y_p$.

a) Procuremos y_h, onde y_h é solução geral da equação de Euler

$$x^2y''+3xy'+y=0 \tag{21.8}$$

com $a_2=1$, $a_1=3$, e $a_0=1$. Fazendo mudança $x=e^t$ ou $y=\ln x$, obtemos da (21.8)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{21.9}$$

Equação característica $r^2+2r+1=0$ implica que $r=-1$ é raiz da multiplicidade 2 e neste caso $\{e^{-t},te^{-t}\}$ é conjunto fundamental para (21.9). Lembrando $t=\ln x$, obtemos que $\{x^{-1},x^{-1}\ln x\}$ é conjunto fundamental para (21.8), e

$$y_h=\frac{c_1}{x}+c_2\frac{\ln x}{x},\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

b) Procuremos y_p. Temos $y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{\ln x}{x^2}=g(x)$. Seja $y_p=\frac{c_1(x)}{x}+c_2(x)\frac{\ln x}{x}$ e

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2}(1-\ln x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\ln x}{x^2}\end{bmatrix}.$$

Assim

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \frac{\ln x}{x}\\ \frac{\ln x}{x^2} & \frac{1}{x^2}(1-\ln x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x}\\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\end{vmatrix}}=\frac{(\ln x)^2}{x^3}:(\frac{1}{x^3}(1-\ln x)+\frac{\ln x}{x^3})=\frac{(\ln x)^2}{x^3}\cdot x^3=(\ln x)^2,$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ \frac{1}{x^2} & \frac{\ln x}{x^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & x^{-2}\\ 1 & \frac{-2}{x^3}\end{vmatrix}}=\frac{\ln x}{x^3}\cdot x^3=\ln x.$$

Agora

$$c_1(x) = \int (\ln x)^2 dx = -x(\ln x)^2 + \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -x(\ln x)^2 + 2\ln x \cdot x + 2\int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= -x(\ln x)^2 + 2x\ln x + 2x + c'$$
$$c_2(x) = \int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + c''.$$

Seja $c' = c'' = 0$, logo

$$y_p = \frac{1}{x}(-x(\ln x)^2 + 2x\ln x + 2x) + \frac{\ln x}{x}(x\ln x - x) = \ln x - 2$$

e solução geral é

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2\frac{\ln x}{x} + 2(\ln x)^2 + \ln x - 2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

;-)